Équations différentielles linéaires du premier ordre. Le mode d'emploi.

Les généralités :

- ***Équation différentielle du premier ordre :*** Elle est décrite par une relation de la forme

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right)$$

où f est une fonction de deux variables (connue) et y une fonction dérivable d'une variable t (inconnue).
Pour alléger l'écriture, on note souvent y pour $y(t)$.
Les solutions d'une telle équation sont les fonctions y vérifiant la relation précédente.
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (si elle admet des dérivées continues par rapport à ses deux variables) sur un domaine D, alors pour tout $(t_0, y_0) \in D$, il existe une unique solution y telle que $y(t_0) = y_0$. Cette dernière égalité s'appelle une condition initiale.

- ***Équation différentielle linéaire du première ordre :*** Elle est de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

où y est la fonction inconnue, a et b des fonctions continues sur un intervale I.
Elle vérifie les conditions précédentes donc pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, elle admet une solution unique y telle que $y(t_0) = y_0$.

Résolution d'une équation linéaire du premier ordre :

- ***Équation homogène associé :*** Elle s'obtient en posant $b(t) = 0$.
L'équation homogène associée à $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est donc $y'(t) = a(t)y(t)$.
Ses solutions sont les fonctions de la forme $y_h(t) = C\mathrm{e}^{A(t)}$ où A est une primitive de a et C une constante quelconque.
L'équation $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ s'écrit parfois $y' - a(t)y = b(t)$. L'équation homogène associée devient $y' - a(t)y = 0$ et s'appelle sous cette forme équation sans second membre.
L'équation initiale est alors appelé équation complète.

- ***Solutions de l'équation complète :*** On obtient les solutions de l'équation complète en ajoutant à une solution particulière y_p de cette équation les solutions y_h de l'équation sans second membre : $y = y_h + y_p$.

Recherche d'une solution particulière :

- ***Cas des équations à coefficients constants :*** Si a est une fonction constante : $a(t) = a$ pour tout t, et si b est de la forme $b(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}P(t)$ où α est un nombre complexe et P un polynôme, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p = \mathrm{e}^{\alpha t}Q(t)$ où Q est un polynôme.
On détermine alors le degré et les coefficients de Q par identification.

- ***Méthode de Lagrange :*** Si les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $y_h(t) = C\mathrm{e}^{A(t)}$, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \varphi(t)C\mathrm{e}^{A(t)}$ où φ est une fonction de la variable t.
On détermine d'abord $\varphi'(t)$ par identification, puis on obtient $\varphi(t)$ par intégration.